К билетам 31-36, 38

Будем считать свет монохроматическим. Таким образом, групповая скорость нам не пригодится.

Для начала парочку слов о том, что такое вообще анизотропные среды.
Мы привыкли к изотропным следам: это среды, все направления в которых равны. В анизотропных средах физические свойства зависят от направления.
На самом деле многие среды анизотропны. Даже обычная бумага.
Проделайте простой опыт: возьмите лист А4, вырежьте одинаковые полоски, но одну параллельно краям листа, а другую под углом. Положите обоих к краю стола так, чтобы у них свисала одна и та же часть по длине (оставшуюся на столе часть придерживайте рукой). Форма свисающих полос (т.н. стрела прогиба) будет различна как раз из-за анизотропии бумаги.

В анизотропных средах всегда можно выбрать такие три ортогональные оси (мы их будем называть главными осями – x, y, z и всё на них проецировать) вдоль которых вектора **D** и **E**, соответствующие направлению распространяющейся вдоль каждой из этих оси, сонаправлены.
То есть если волна идёт вдоль оси x, то

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_x\mathbf{E}$$

Если волна идёт вдоль оси y, то

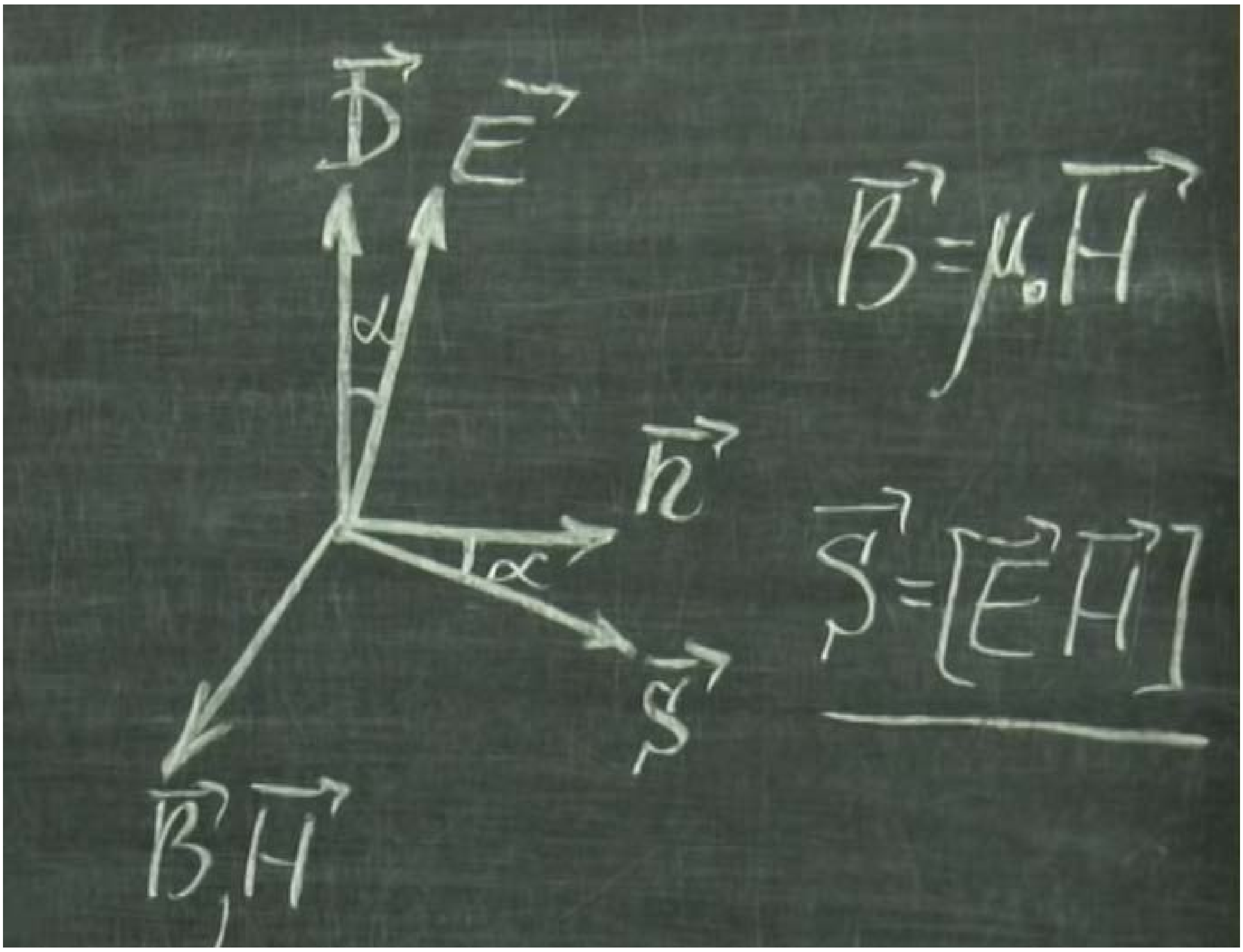
$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_y\mathbf{E}$$

Если волна идёт вдоль оси z, то

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_z\mathbf{E}$$

То есть диэлектрическая пронимаемость зависит от направления (на то она и анизотропия – не все направления равны!).
Тогда от направления зависит и показатель преломления. Обозначая n вдоль каждой оси как квадратный корень из соответствующего ε, получаем три n и три скорости: c/n_x, c/n_y, c/n_z (они называются главными).
А что будет, если мы возьмём не одну из наших трёх осей в качестве направления распространения света? Начнутся приколы.
Задача, которую мы сейчас будем решать: зная n_x, n_y, n_z (и три главные скорости, соответственно), понять, с какой скоростью будут распространяться волны в произвольном направлении.

Возьмём какое-нибудь «плохое» направление. См. рисунок:



А теперь вспомним, что вектор Умова-Пойтинга – это векторное произведение [**ExH].** И если с **H** всё хорошо, то **E** торчит не туда. Из-за этого и **S** будет торчать не туда.

То есть скорость распространения потока энергии (т.н. лучевая скорость v_s) будет не параллельна вектору нормали к волне и фазовой скорости v!

Русаков вводит вектор **s** – единичный вектор **S**. Он называется лучом.
Поэтому v_s и называется лучом – вдоль луча же.
А что больше? **v или v_s**? Оказывается, можно вывести, что

$$v=v_s*\cos\alpha$$

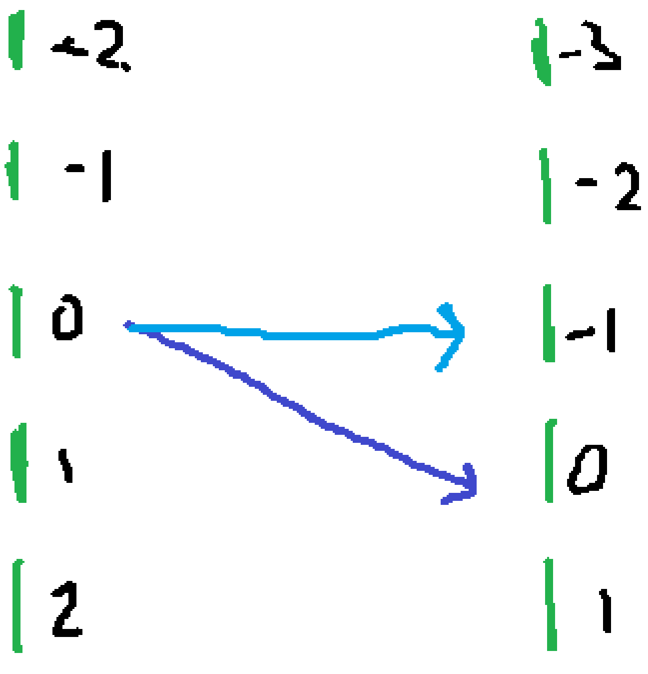
(где α – угол между скоростями, см. рис)
А вдоль главных осей α=0, cosα = 1 и эти две скорости сонаправлены и равны.

Таким образом, если в прошлый раз у нас был версус фазовой и групповой скорости, то на этот раз будет версус фазовой и лучевой. У каждой будет по уравнению и эллипсоиду. У лучевой ещё будет лучевая поверхность. Крепитесь.

В некотором роде, как видно из уравнения $v=v_s*\cos\alpha$, фазовую скорость можно считать проекцией лучевой скорости на ось нормали. То есть свет распространяется реально вдоль луча (туда прёт энергия), а фазовая скорость – это её проекция.
Таким образом, лучевая скорость кажется «настоящей» скоростью, а фазовая… казалось, бы зачем она? Взяли какую-то ось нормали (а именно, перпендикулярную **D** и любому из **B** и **H)**, спроецировали «настоящую» лучевую скорость на нормаль и назвали фазовой. И зачем она нам?

В случае, если у нас один квант света (или бесконечно тонкая волна, т.е. с бесконечно малым сечением), фазовая скорость действительно не нужна – этот квант полетит по лучу с лучевой скоростью. А теперь представим себе фронт плоской волны. Тогда как раз фронт будет двигаться с фазовой скоростью (и в направлении нормали - ну, фронт же всегда параллелен **D** и любому из **B** и **H**), хотя каждый квант будет двигаться по лучу с лучевой скоростью.

Если мы разобьём фронт на кванты и пронумеруем им, будет наглядней:



Лучевая скорость – синяя, скорость движения каждого кванта
Голубая скорость – это фазовая. Это скорость движения всего фронта.

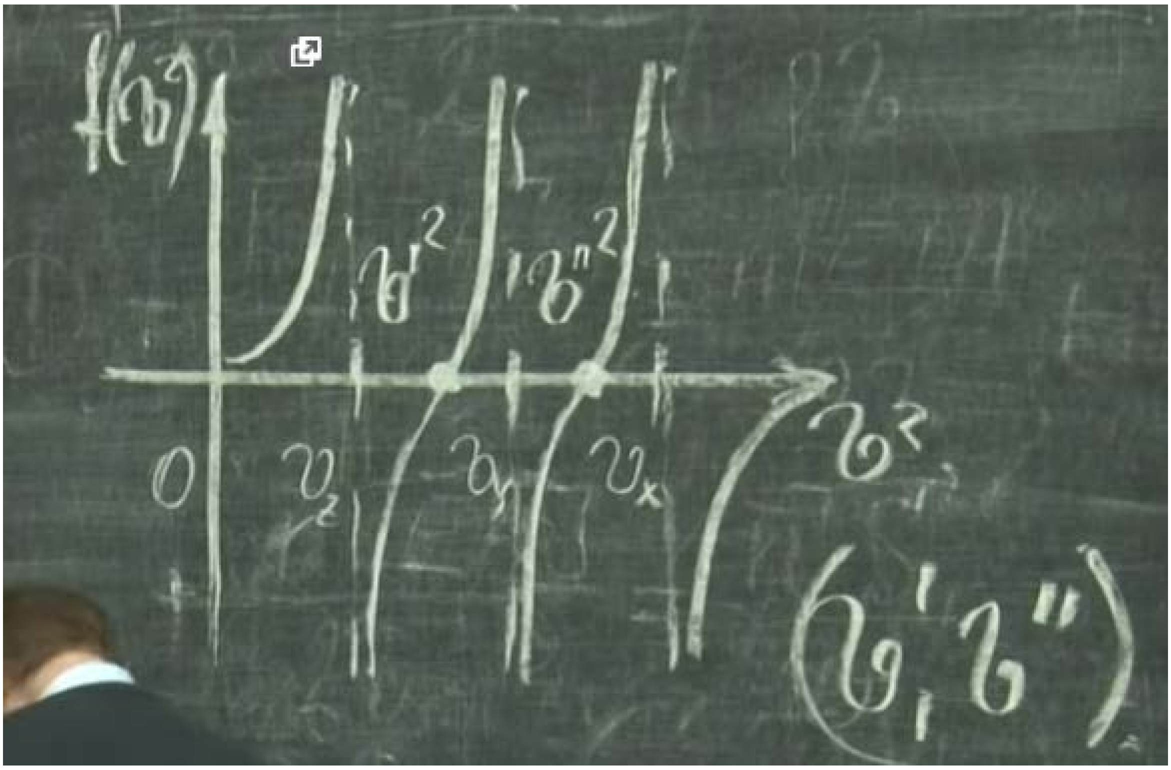
Таким образом, физический смысл есть у обоих скоростей.

Получим так называемое **уравнение нормалей Френеля.** e_x, e_y, e_z – направляющие косинусы нормали на главные оси x, y, z.

$$\frac{e_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{e_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{e_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0.$$

v_x, v_y, v_z — главные скорости волны.

Мы знаем там всё, кроме искомой v – фазовой скорости. Как раз её оттуда и находим. Нарисуем-ка график левой части от v, считая все три главных скорости разные. Не умаляя общности, пусть $v_z < v_y < v_x$.



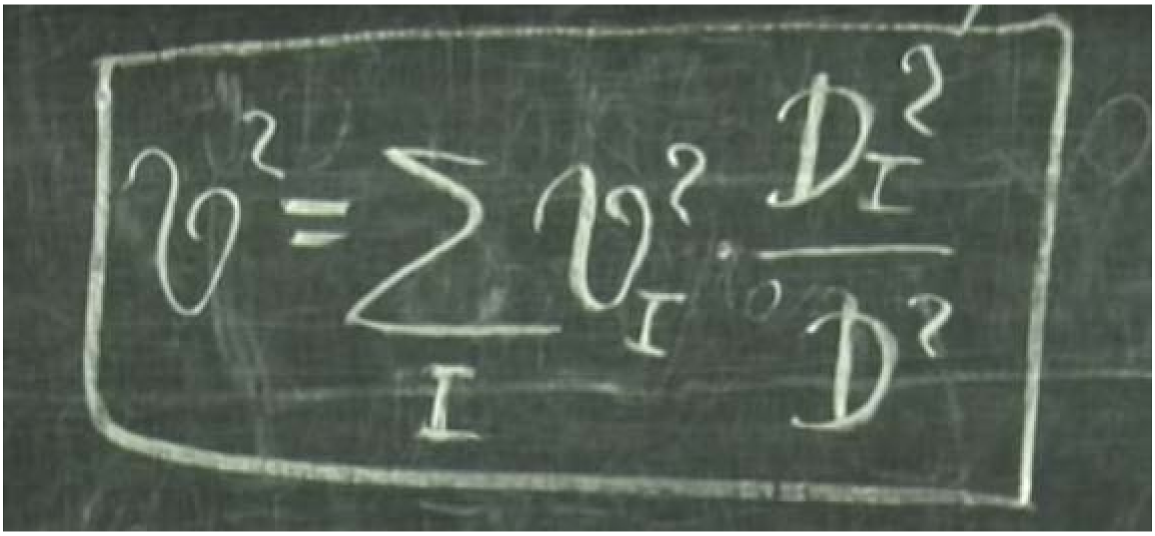
Упс. У нас получилось два корня… Получается, что волна может распространяться вдоль одного направления с двумя скоростями? Эти скорости обозначаются как v^{I} и v^{II}.
На самом деле одна из этих скоростей – обыкновенная, а другая – необыкновенная. С какой скоростью будет распространяться луч, зависит от его поляризации и угла между **n** и **E**.

А для лучевой скорости u немного другое уравнение – **уравнение лучевых скоростей:**

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v_x^2}}+\frac{s_x^2}{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v_y^2}}+\frac{s_x^2}{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v_z^2}}=0.$$

Сверху, естественно, s_y и s_z, а не только s_x. Но про лучевую скорость поговорим позже.

Русаков предложил ещё одну формулу для v – фазовой скорости:



Где I – это x, y, z.

А для лучевой скорости, кстати, есть похожая:

$$\frac{1}{v_s^2}=\sum_I \frac{1}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2,$$

Теперь давайте рисовать эллипсиоды!

Эллипсоид нормалей. Две волны, распространяющиеся с разными скоростями v' и v'', удобно анализировать с помощью *эллипсоида нормалей* (*индикатрисы*), описываемого уравнением

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x}+\frac{y^2}{\varepsilon_y}+\frac{z^2}{\varepsilon_z}=1. \qquad (19.19)$$

Длины полуосей этого эллипсоида $\sqrt{\varepsilon_x}=c/v_x$, $\sqrt{\varepsilon_y}=c/v_y$, $\sqrt{\varepsilon_z}=c/v_z$ обратно пропорциональны главным скоростям. Проведем через начало координат пло-

Иначе этот эллипсоид называется индикатрисой, или эллипсоид фазовых скоростей.

Рассечём эллипсоид плоскостью, перпендикулярной нормали (то есть параллельной обоим D и B). Тогда получим в сечении эллипс. Ну вот оказывается, что две его полуоси – это v^{I} и v^{II}.

Кстати, в двуосном кристалле (v_x не равно v_y не равно v_z) существуют, помимо трёх главных направлений, ещё два (т.н. бинормали, или оптические оси второго порядка), для которых $v^{I}=v^{II}$.

Теперь про лучевые скорости. Там свой эллипсоид – эллипсоид Френеля, или эллипсоид лучевых скоростей. Задаётся так:

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1$$

Ну-ка сразу сравним с первым эллипсоидом (индикатрисой) – на фазовые скорости:

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1.$$

Там диэлектрические проницаемости были в знаменателе, а для фазовых скоростей они в числителе.
Как этим эллипсоидом пользоваться? Его можно переписать так:

$$\left(\frac{X}{v_x}\right)^2 + \left(\frac{Y}{v_Y}\right)^2 + \left(\frac{Z}{v_z}\right)^2 = 1.$$

Откуда явно видно, что длины главных полуосей $1/\mathrm{sqrt}(\varepsilon_x)=v_x/c$ ПРЯМО пропорциональны (для индикатрисы были ОБРАТНО пропорциональны) главным скоростям, а если мы проведём сечение плоскостью, перпендикулярной лучу, то мы вновь получим эллипс с двумя полуосями – $v_S^{I}=v_S^{II}$.

Но неудобно как-то получается – чтобы узнать скорости, нужно сечение провести. Нельзя ли просто в каждом направлении построить лучевую скорость? Оказывается, это так называемая *<u>лучевая поверхность.</u>*
Вот так она задаётся:

$$\sum_i \frac{v_s \cdot s_i \cdot v_i^2}{v_s^2 - v_i^2} = 0$$

Это уравнение достаточно противной поверхности: она состоит из двух оболочек, которые к тому же ещё и пересекаются. Понятно, почему оболочек две: у нас же две возможных лучевых скорости.

Вот как раз оказывается, что:

$$\vec{R} = v_s \cdot \vec{s} = \vec{v_s}$$

$$R = v_s.$$

То есть радиус-вектор из (0;0;0) на любую точку этой поверхности – это лучевая скорость в этом направлении. Точнее, одна из двух, потому что луч из (0;0;0) пересечёт поверхность в общем случае в двух точках (редко – в одной, где две оболочки пересекаются).

Фронт волны – это касательная плоскость к любой точке на этой поверхности. То есть если в (0;0;0) произошла вспышка, то данная поверхность ограничивает объём, который к данному моменту времени узнал об этой вспышке.

Рассмотрим отдельно одноосные кристаллы.

В них $v_x = v_y$ не равно v_z. Обозначим $v_x = v_y = v_o$ (англ. ordinary), $v_z = v_o$ (англ. extraordinary). Именно такие кристаллы на 147 и 410 праках. И на третьем упражнении 401 тоже он.

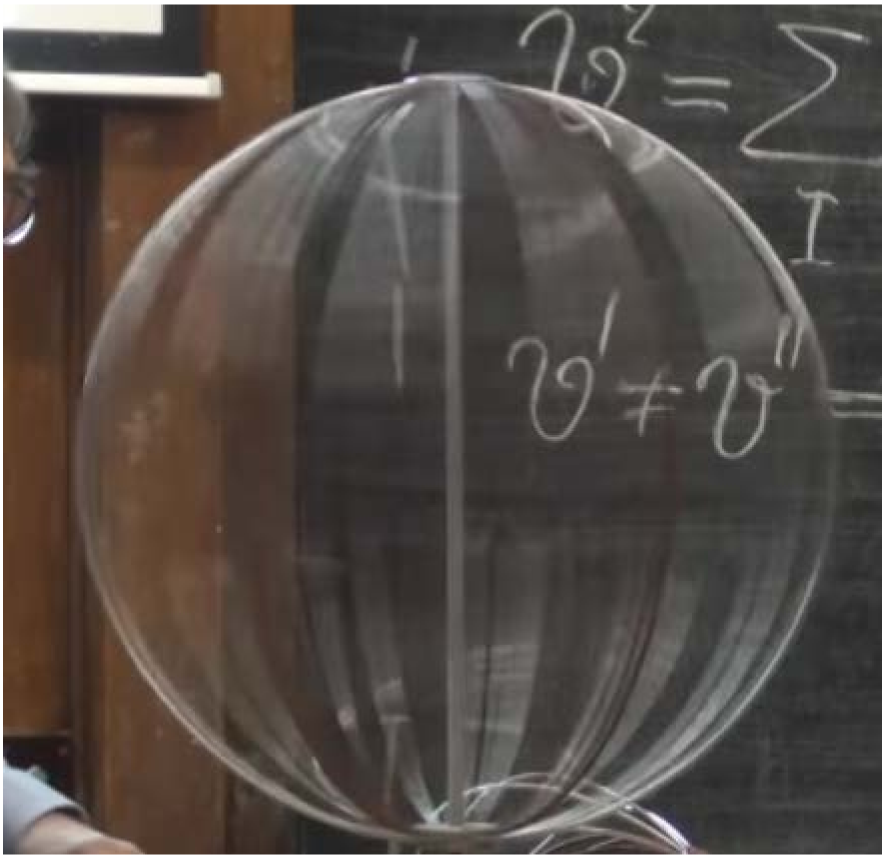
Нетрудно заметить, что выбор осей x и y не важен: мы можем взять любые две перпендикулярные друг другу оси в плоскости, перпендикулярной оси z. Тут есть некая симметрия относительно оси z, связанная с возможность поворота вокруг неё на любой угол без изменения физических свойств.

Как выглядит эллипсоид Френеля? Так как его полуоси – это и есть главные оси, то из-за равенства двух из трёх полуосей он является эллипсоидом вращения.

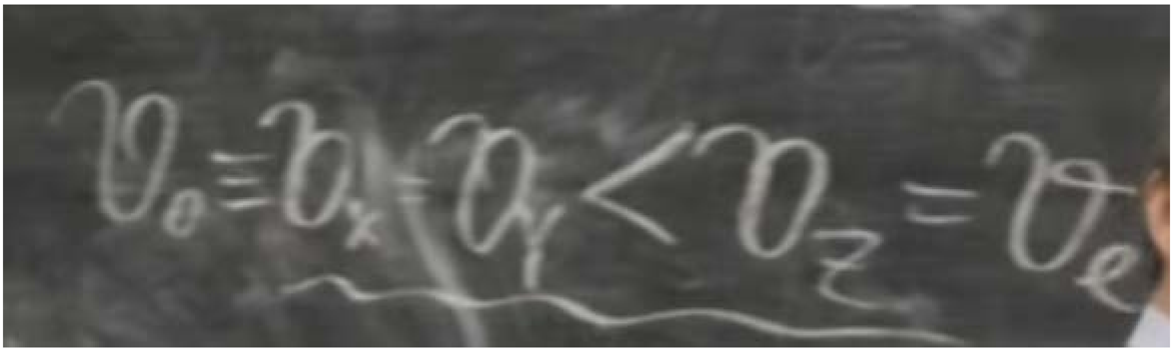
А как будет выглядеть лучевая поверхность?
Тут будет сфера и эллипсоид, и что-то будет вписано во что-то:

Он же, но раскрученный для наглядности:

А может быть наоборот, не сфера вписана в эллипсоид, а эллипсоид вписан в сферу.
Вот так:

А если раскрутить:


Какой из этих двух случаев будет реализовываться? Тут зависит от того, что больше: обыкновенная скорость или необыкновенная.
В т.н. отрицательных одноосных кристаллах, где

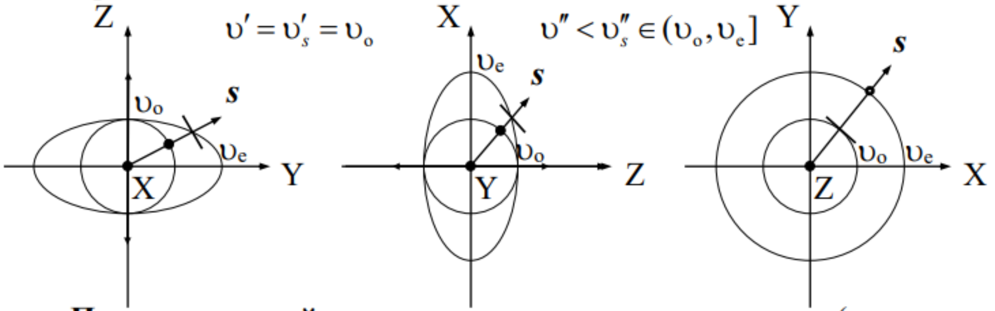


Будет первый случай.
А в положительных одноосных кристаллах

Будет второй случай.
Как запомнить, какой положительный, какой отрицательный? Да просто – в положительным тех, которых больше, двое, а тех, кого меньше, один. В отрицательном наоборот.

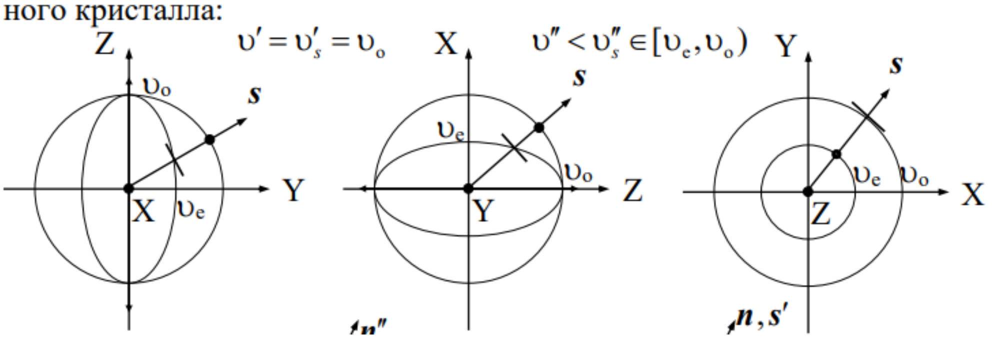
Отрицательный кристалл – $\upsilon_o \equiv \upsilon_X = \upsilon_Y < \upsilon_Z \equiv \upsilon_e$ ($n_o \equiv n_X = n_Y > n_Z \equiv n_e$) эллипсоид Френеля вытянут вдоль оси вращения Z; лучевая сфера вписана в сплющенный вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения. Исландский шпат – $CaCO_3$ с $n_o = 1.658 > n_e = 1.486$.

Главные сечения лучевой поверхности одноосного отрицательного кристалла:

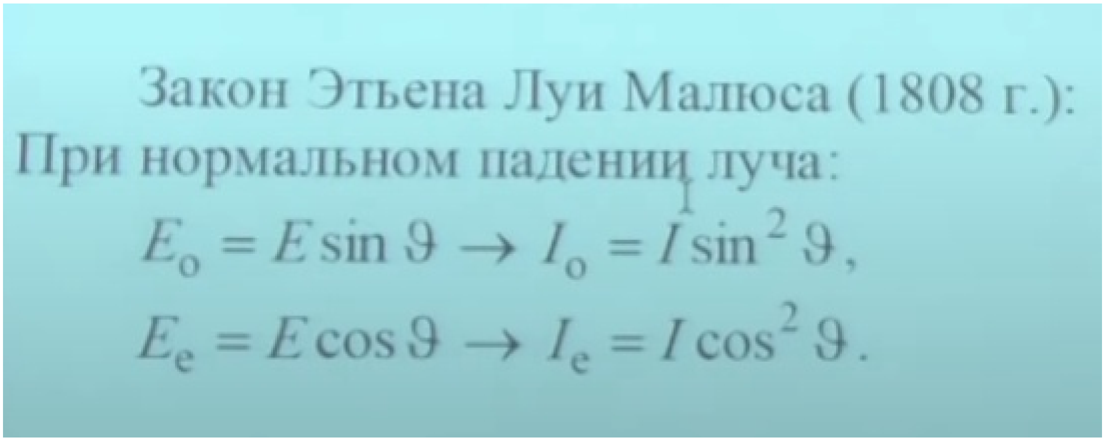


Положительный кристалл – $\upsilon_o \equiv \upsilon_X = \upsilon_Y > \upsilon_Z \equiv \upsilon_e$ ($n_o \equiv n_X = n_Y < n_Z \equiv n_e$); эллипсоид Френеля сплюснут вдоль оси Z; лучевая сфера охватывает вытянутый вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения. Кварц – SiO_2 с $n_o = 1.543 < n_e = 1.552$.

Главные сечения лучевой поверхности одноосного положительного кристалла:

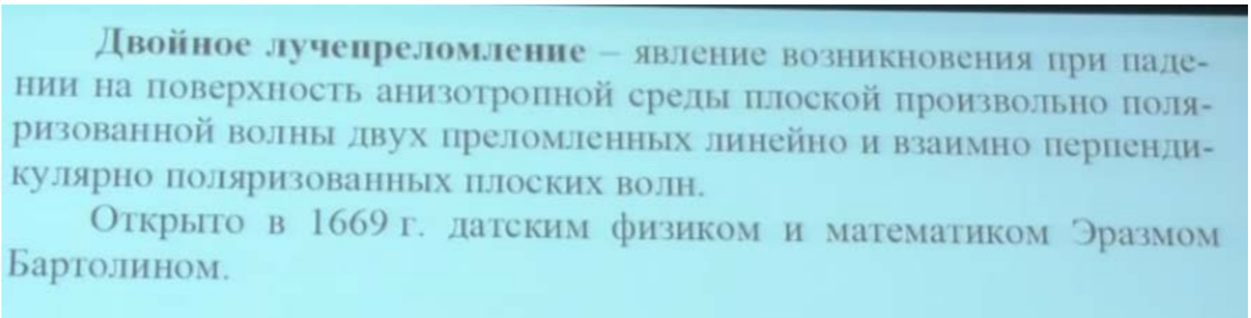


Закон Малюса… Это такой баян, что его знают все. Но всё же приведу:



То есть при падении луча на одноосный кристалл одна из компонент **E** уничтожается.

Двойное лучепреломление. Что это?



Двойное лучепреломление – явление возникновения при падении на поверхность анизотропной среды плоской произвольно поляризованной волны двух преломленных линейно и взаимно перпендикулярно поляризованных плоских волн.

Открыто в 1669 г. датским физиком и математиком Эразмом Бартолином.

Перевожу на русский: шарахнем на анизотропный кристалльчик волной. Да пофиг на поляризацию, хоть естественной. Тогда на границе сред луч размножится – внутрь кристалла пройдут два луча (ну ещё один отразится, но он нам неинтересен).

Если наглядно, то вот

Ой, простите, не тот кристалл. Этот раздвоение личности вызывает с полным преломлением, а у нас про лучи всё-таки речь. Сейчас будет тот:

(фотка из учебника Алешкевича):

Рис. 19.1. Двойное лучепреломление в кристалле кальцита

(фото из методички Митина)

Чтобы рассчитать это двойное лучепреломление, потребуется принцип Гюйгенса – тот самый, из дифракции. И он сложный. Алешкевич и Русаков там что-то считают, можете вникнуть, если хотите. Но двойное лучепреломление только в 36 билете, и то один из множества вопросов там, так что на экзе главное – понимать, что это.

Билет 37 на лямбды-2 и лямбды-4 трогать не будем, там уже все всё по 410 праку знают.

А в билете 38 – наведённая анизотропия. Это явление анизотропных оптических свойств изначально изотропных сред под действием механического, электрического или магнитного внешнего действия.
В зависимости от того, будет ли отклик среды линейным или нет, эффект называется линейным.

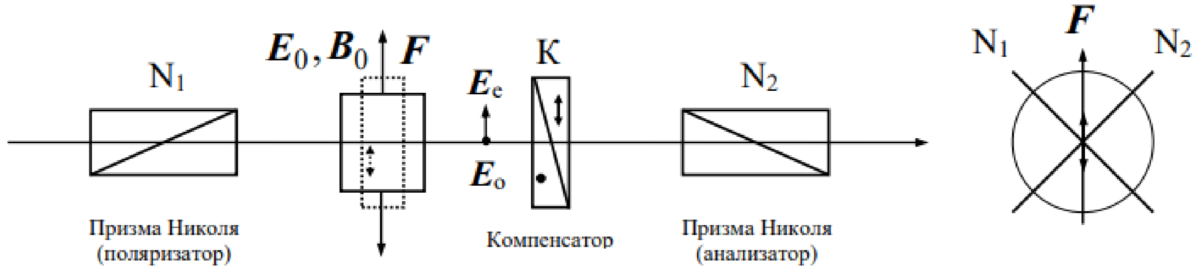
Наведенная анизотропия оптических свойств.

Механо- (электро-, магнито-) оптические эффекты – изменение оптических характеристик среды под внешним механическим (электрическим, магнитным) воздействием.

Оптические эффекты, вызванные внешним воздействием.

Воздействие	Тип эффекта	Эффект	Год	Авторы
Механическое	Линейный (поперечный)	**Фотоупругость**	1813 1815	Немецкий физик Томас Иоганн Зеебек, Шотландский физик Дэвид Брюстер
Электрическое	Линейный (поперечный)	**Поккельса**	1894	Немецкий физик Фридрих Карл Поккельс
	Квадратичный (поперечный)	**Керра**	1875	Шотландский физик Джон Керр
Магнитное	Квадратичный (поперечный)	**Коттон-Мутона**	1907	Французские физики Эме Коттон, А. Мутон
	Расщепление (прод. и попереч.)	**Зеемана**	1896	Нидерландский физик Питер Зееман
	Линейный (продольный)	**Фарадея**	1846	Английский физик Майкл Фарадей

Рассмотрим схему наблюдения, например, фотоупругости.



Оси двух поляризаторов направлены перпендикулярно друг другу. Поэтому если бы не было ни пластины, ни компенсатора К, свет бы не проходил.

Изначально пластина не деформирована. Компенсатор же создаёт разность ходов обыкновенной и необыкновенной волны в зависимости от места, где она компенсатор проходит (вроде бы). Поэтому на экране мы будем видеть чередование белых и чёрных полос: чёрных, где компенсатор ничего не внёс, белых, где компенсатор внёс разность фаз π. Или не π. Мне лень думать. Растягивая пластину, на экране будем наблюдать изменение полос.
Вот тут ещё что-то подсчитано:

Фотоупругость – линейный механооптический эффект.

Мера возникшей оптической анизотропии – разность главных показателей преломления для необыкновенной n_e ($\boldsymbol{E}_e \parallel \boldsymbol{F}$) и обыкновенной n_o ($\boldsymbol{E}_o \perp \boldsymbol{F}$) волн (смена знака $\sigma \to$ смена знака $\Delta n(\omega)$):

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega) \cdot F / S = \gamma(\omega) \cdot \sigma \;\; (\gamma > 0, \gamma < 0),$$

$$\Delta\varphi = k_0(\omega)(n_e(\omega) - n_o(\omega))l = \frac{\omega}{c}\Delta n(\omega) l = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta n(\omega) l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)} \cdot 2\pi\sigma l\,.$$

$\gamma(\omega)$ – **постоянная Брюстера**, для стекол $\gamma(\omega) = 10^{-12} - 10^{-11}$ м²/Н.

Если будем светить не монохроматическим светом, а белым, то вместо чёрных и белых полос будут разноцветными.

Теперь про электрические эффекты.
Первым был открыт эффект Керра – квадратичный. При этом по величине он меньше линейного, но история такова:

Эффект Керра – квадратичный электрооптический эффект в <u>центрально-симметричных</u> средах (неизменность характеристик при преобразовании инверсии – смене направления $\boldsymbol{E}_0$ на обратное).

Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора ($-kx - \beta x^3$), $\boldsymbol{E}_0 \parallel \boldsymbol{E}(t)$, $E_0 >> E(t)$:

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega) E_0^2,$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}(n_e - n_o)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)} 2\pi E_0^2 l = B(\omega) \cdot 2\pi E_0^2 l\,.$$

где $B(\omega) = \gamma(\omega)/\lambda_0(\omega)$ – **постоянная Керра**.

<u>Механизм</u> – поляризация и ориентация анизотропных молекул.

Для неполярных молекул $B > 0$, для полярных – $B > 0$ и $B < 0$.

Эффект Керра определяется свойствами молекул и, следовательно, усиливается с повышением концентрации молекул.

Для жидких кислорода и азота – $\sim 10^{-10}$ м/В² и $\sim 4 \cdot 10^{-10}$ м/В². Для них же в газообразном состоянии – $\sim 4.5 \cdot 10^{-14}$ м/В² и $\sim 3 \cdot 10^{-14}$ м/В².

С повышением температуры постоянная Керра падает из-за дезориентирующего действия температуры на дипольные моменты.

и

Эффект Поккельса – линейный электрооптический эффект.

Схема опыта для обнаружения эффекта Поккельса (также, как и эффекта Керра) полностью аналогична схеме наблюдения фотоупругости. Единственное отличие – образец (твердое тело, жидкость или газ) помещается между обкладками плоского конденсатора.

Механизм – ангармонизм движения связанных зарядов в кристалле. Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора ($-kx-\beta x^2$), $\boldsymbol{E}_0 \parallel \boldsymbol{E}(t)$, $E_0 >> E(t)$:

$$E_0 \Rightarrow \Delta\omega_0^2 = \frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2} E_0 \Rightarrow \Delta n(\omega),$$

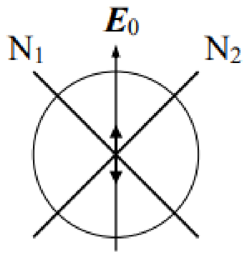
$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = -\frac{\omega_n^2}{2n(\omega_0^2-\omega^2)^2} \cdot \frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2} E_0 = \gamma(\omega) E_0,$$

Для кристалла дигидрофосфата калия KH_2PO_4 – $\gamma = 3.6 \cdot 10^{-11}$ м/В, для ниобата лития $LiNbO_3$ – $\gamma = 3.7 \cdot 10^{-10}$ м/В.

Линейный оптический эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.

А как быстро кристалл после воздействия становится неанизотропным для света? Оказывается, быстро, за 10^{-10} секунды:

Эффекты Поккельса и Керра практически безынерционны (время релаксации ~$10^{-10} \div 10^{-13}$ с). $\Rightarrow$ ячейки Поккельса и Керра – изотропный кристалл во внешнем поле с наведенной оптической осью и симметрично скрещенные под 90° два поляроида – высокоскоростные электрооптические модуляторы света (в том числе оптические затворы для лазеров).



Ну и последний эффект, который есть в билетах – это

Явление Коттон-Мутона – квадратичный магнитооптический эффект в поперечном магнитном поле:

$$n_e - n_o = \gamma(\omega) B_0^2 \quad (\gamma \sim 10^{-8}\ \text{Тл}^{-2}),$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)} (n_e - n_o) l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)} 2\pi B_0^2 l = C(\omega) \cdot 2\pi B_0^2 l.$$

Механизм – ориентация анизотропных молекул, обладающих $\boldsymbol{\mu}$ (аналог. механизму поведения полярных молекул в эффекте Керра).

Этот эффект очень мал. Для нитробензола – $C \sim 2 \cdot 10^{-2}$ м$^{-1}$Тл$^{-2}$. В магнитном поле 1 Тл при $l = 10$ см разность фаз равна $\Delta\varphi \cong 0.72°$.

Вот.